

ALEXANDER GROTHENDIECK

La révolution des catégories et des topos

Vers une logique de la relation — Article pédagogique · Série Science & Philosophie

I. L'homme : biographie d'une rupture

Alexander Grothendieck (1928–2014) est une figure hors normes dans l'histoire des mathématiques — et dans l'histoire des idées. Né à Berlin d'un père anarchiste russe et d'une mère allemande, il passe une enfance chaotique entre l'Europe en guerre et les camps d'internement. Il n'a aucune formation classique, aucun grand mentor : c'est cette *décoïncidence* fondatrice qui lui permettra de voir ce que les autres ne peuvent pas voir depuis leurs traditions.

À l'**IHES** (Institut des Hautes Études Scientifiques, fondé en 1958), il produit en une décennie une œuvre d'une ampleur sans précédent : la refondation de la géométrie algébrique, la théorie des schémas, la cohomologie étale, la conjecture de Weil, la théorie des topos. Puis, en 1970, il quitte l'IHES, refusant les financements militaires. Il rejoint le mouvement **Survivre et Vivre**, s'engage dans l'écologie radicale, et finit par se retirer à Lasserre dans les Pyrénées, où il vivra reclus jusqu'à sa mort en 2014.

Son œuvre autobiographique *Récoltes et Semailles* (1983–1986, publiée chez Gallimard en 2022) est à la fois une méditation sur sa pratique mathématique, une critique acerbe du milieu académique, et une réflexion spirituelle. Elle contient sa théorie de la «**& mer montante**» — la métaphore qui résume toute sa philosophie des mathématiques.

► La métaphore de la mer montante

« L'inconnu à connaître m'apparaît comme un sol résistant à la pénétration... la mer avance insensiblement dans le silence, rien ne semble se passer, rien ne bouge, l'eau est si loin qu'on l'entend à peine... et pourtant elle finit par envelopper la substance résistante. »

Deux styles de mathématicien : (1) la force brute — attaquer le problème à la hache, résoudre par calcul. (2) la mer montante — rendre le problème *naturel* par la construction du bon cadre conceptuel, jusqu'à ce que la solution soit évidente. Grothendieck pratique exclusivement la seconde méthode.

II. La révolution catégorielle : des objets aux morphismes

Le glissement ontologique fondamental

Avant Grothendieck, les mathématiques étaient fondées sur les **objets** : les nombres, les ensembles, les espaces. La théorie des ensembles de Cantor–Zermelo–Fraenkel (ZF) postule que la réalité mathématique est constituée d'*éléments* — des points, des atomes. Ce paradigme a une parenté directe avec le substantialisme philosophique : la réalité se compose d'**êtres propres** dotés de propriétés intrinsèques.

La **théorie des catégories**, développée par Eilenberg et Mac Lane (1945) puis radicalisée par Grothendieck, opère un renversement complet : ce qui compte n'est plus *ce qu'est* un objet, mais *comment il se relie* aux autres. Les **morphismes** — les flèches, les transformations, les relations — deviennent premiers. L'objet n'est défini que par ses relations.

► Le triangle fondamental de la théorie des catégories

Objets — les entités (ensembles, espaces, groupes, anneaux...) **Morphismes** — les flèches entre objets (fonctions, homomorphismes, applications continues...) **Composition** — la loi de composition des flèches (f puis $g = g \circ f$) Avec deux axiomes : identité et associativité.

La leçon de Grothendieck : « Les propriétés géométriques importantes doivent être comprises comme des propriétés des *morphismes*, non des objets. » Un espace n'est rien en soi — il est ce que ses morphismes vers et depuis lui révèlent.

Foncteurs et transformations naturelles

Un **foncteur** est une application entre catégories qui préserve la structure des morphismes. Ce n'est plus une fonction entre objets, mais une *correspondance entre mondes* entiers. Mac Lane et Eilenberg avaient inventé les catégories pour donner un sens précis à la notion de **transformation naturelle** — une transformation entre foncteurs qui est «& naturelle& » en ce sens qu'elle ne dépend d'aucun choix arbitraire.

Grothendieck comprend que les foncteurs **adjoints** sont le phénomène central des mathématiques. Deux foncteurs $F : C \rightarrow D$ et $G : D \rightarrow C$ sont adjoints si $\text{Hom}(F(A), B) \cong \text{Hom}(A, G(B))$ — une correspondance universelle entre les morphismes. Lawvere ira jusqu'à dire que «& l'adjonction est le concept unificateur des mathématiques& ».

Vision classique (ensembles)	Vision catégorielle (Grothendieck)
Réalité = objets dotés de propriétés	Réalité = réseau de morphismes
Identité = ce qu'une chose EST	Identité = ce qu'une chose FAIT (ses relations)
Égalité = identité des objets	Égalité = isomorphisme (équivalence structurale)
Logique = vrai/faux (bivalente)	Logique = espace de preuves (intuitioniste)
Structure = forme intrinsèque	Structure = invariant sous transformations

III. Les topos : l'espace généralisé

Du faisceau au topos

La notion de **faisceau** (sheaf) est née en topologie algébrique pour capturer les données locales d'un espace. Serre et Grothendieck l'utilisent massivement dans les années 1950-60. Grothendieck remarque alors quelque chose de remarquable : la catégorie des faisceaux sur un espace topologique donné **possède toutes les propriétés** de la catégorie des ensembles — elle est «& universelle& » dans un sens précis.

Cette observation le conduit à la définition d'un **topos** (pluriel : topos ou topoi) : une catégorie qui «& se comporte comme& » la catégorie des ensembles. Un topos possède : des limites

finies, un objet exponentiel, et un **classificateur de sous-objets** Ω — un objet des «& valeurs de vérité& ». C'est ce dernier qui est décisif.

► L'objet Ω : la révolution logique

Dans la catégorie des ensembles, $\Omega = \{0, 1\}$ — les deux valeurs de vérité classiques VRAI et FAUX. C'est le tiers exclu aristotélicien : toute proposition est vraie OU fausse.

Dans un topos général, **Ω peut avoir bien plus de deux éléments**. Dans le topos des faisceaux sur un espace topologique X , les valeurs de vérité sont les *ouverts de X* — un treillis qui peut être infini. «& Vrai& » et «& Faux& » ne sont que deux valeurs parmi d'autres possibles.

Conséquence : la logique interne d'un topos général est **intuitionniste**, non classique. Le tiers exclu ne vaut plus en général : une proposition peut n'être ni prouvée, ni réfutée.

La topologie de Grothendieck

Pour étendre le concept de faisceau à des catégories abstraites (les *sites*), Grothendieck invente une notion de **topologie** qui ne requiert aucun «& point& ». Une **topologie de Grothendieck** est une règle qui dit quand une famille de morphismes «& recouvre& » un objet — sans que les objets aient besoin d'être des espaces ponctuels.

Il existe même des topos **sans points du tout** — des *topos pointless*. C'est le vertige conceptuel de la géométrie grothendieckienne : un «& espace& » défini uniquement par ses relations internes, sans substrat ponctuel. L'espace n'est plus un *Umgebung* brut — il est entièrement constitué par ses *morphismes de recouvrement*.

IV. La logique intuitionniste : prouver c'est construire

Brouwer et le rejet du tiers exclu

La **logique intuitionniste** naît avec le mathématicien hollandais **L.E.J. Brouwer** (1881–1966). Sa thèse centrale : les objets mathématiques n'existent pas dans un monde platonicien indépendant de l'esprit humain — ils *existent parce qu'ils sont construits*. Une démonstration d'existence doit être **effective** : elle doit fournir un exemple, pas seulement prouver qu'un exemple est impossible à ne pas exister.

Brouwer **rejette le tiers exclu** (*tertium non datur*) : la loi logique $P \vee \neg P$ (toute proposition est vraie ou fausse). Il refuse aussi la **double négation** : de $\neg\neg P$ on ne peut pas toujours conclure P . Ces deux refus semblent anodins mais ont des conséquences profondes : de nombreux théorèmes de l'analyse classique tombent.

► Interprétation BHK : la vérité comme construction

L'interprétation de Brouwer–Heyting–Kolmogorov reformule les connecteurs logiques en termes de *constructions* :

- Une preuve de $A \wedge B$ = une paire (preuve de A , preuve de B)

- Une preuve de $A \vee B$ = soit une preuve de A, soit une preuve de B (avec indication laquelle)
- Une preuve de $A \rightarrow B$ = une procédure qui transforme toute preuve de A en preuve de B
- Une preuve de $\neg A$ = une preuve que $A \rightarrow \perp$ (A implique l'absurde)

Conséquence : prouver que quelque chose «& ne peut pas ne pas exister& » ne suffit pas — il faut le *construire*. La mathématique intuitionniste est une mathématique de l'action, non de l'état.

La correspondance de Curry-Howard : preuves et programmes

En 1969, le logicien William Howard observe que les règles de déduction de la logique intuitionniste sont **isomorphes** aux règles de typage du lambda-calcul. Ce résultat, connu comme la **correspondance de Curry-Howard**, énonce :

Logique intuitionniste	Informatique (lambda-calcul)
Proposition	Type
Preuve	Programme / terme
Implication $A \rightarrow B$	Fonction de type $A \rightarrow B$
Conjonction $A \wedge B$	Paire de type $A \times B$
Disjonction $A \vee B$	Type somme $A + B$
Normalisation de preuve	Evaluation de programme

Le leitmotiv est : «& **prouver, c'est programmer**& ». Une preuve mathématique est un programme, une proposition est un type, une démonstration est une exécution. Ce pont entre la logique et l'informatique est l'un des résultats les plus profonds du XXe siècle.

V. Topos et logique : le pont de Lawvere

Le logicien **William Lawvere** (à partir des années 1960) établit la connexion formelle entre topos et logique intuitionniste. Dans tout topos ε , on peut définir un **langage interne** — une logique d'ordre supérieur dont les types sont les objets de ε et les termes les morphismes. Le résultat central :

▸ Théorème fondamental (Lawvere–Tierney)

La logique interne d'un topos est une logique intuitionniste d'ordre supérieur.

Inversement, toute théorie en logique intuitionniste du premier ordre possède un **topos classifiant** — un topos ε tel que les modèles de la théorie dans un topos ε' correspondent exactement aux morphismes de topos $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$. La théorie et son univers de modèles sont *deux faces d'un même objet catégoriel*.

Ce que cela signifie : il n'existe pas *une* logique universelle, mais une **pluralité de logiques**, chacune interne à son topos. Changer de topos, c'est changer d'univers logique.

L'algèbre de Heyting (la structure algébrique correspondant à la logique intuitionniste) est précisément la structure de l'objet Ω dans un topos. La connexion est complète : **géométrie (topos) $\leftrightarrow$ logique (intuitionniste) $\leftrightarrow$ algèbre (Heyting) $\leftrightarrow$ informatique (types).**

VI. Résonances philosophiques

Nāgārjuna : des objets aux relations

La révolution catégorielle de Grothendieck présente une parenté frappante avec la philosophie de **Nāgārjuna**. Là où Nāgārjuna réfute le *svabhāva* — l'être propre, l'existence intrinsèque et autonome — Grothendieck réfute la priorité ontologique de l'objet mathématique isolé. Dans les deux cas, la réalité n'est pas constituée d'*êtres* mais de *relations*. Le **pratītyasamutpāda** (coproduction conditionnée) et le **théorème de Yoneda** (un objet est entièrement déterminé par ses morphismes vers et depuis lui) partagent la même intuition fondamentale.

Wittgenstein : le tiers exclu et les jeux de langage

Wittgenstein notait dans les *Recherches philosophiques* que le tiers exclu ne vaut que dans des *jeux de langage* suffisamment déterminés. La logique intuitionniste peut être lue comme la formalisation de cette intuition : la vérité n'est pas un état objectif (*P est vraie*) mais le résultat d'une *construction dans un contexte*. Chaque topos définit un jeu de langage différent, avec ses propres règles de preuve.

Berque : la trajectivité et la pluralité des logiques

La mésologie de Berque résonne avec la pluralité des logiques intuitionnistes. Tout comme il n'existe pas un milieu universel (Umgebung abstraite) mais une pluralité de milieux vécus (Umwelten trajectifs), il n'existe pas une logique universelle mais une pluralité de logiques, chacune interne à son topos. La formule $r = S/P$ (la réalité comme relation *S en-tant-que P*) trouve son pendant mathématique dans le **théorème de Yoneda** : un objet *A* est entièrement déterminé par le foncteur $\text{Hom}(-, A)$, c'est-à-dire par l'ensemble de ses relations avec tous les autres objets.

VII. L'héritage et l'ouverture

L'œuvre de Grothendieck a ouvert des chantiers encore actifs aujourd'hui : la **théorie homotopique des types** (HoTT), développée par Voevodsky, formalise l'idée que les preuves d'égalité sont elles-mêmes des objets mathématiques (des chemins dans un espace) — une version *infini-catégorielle* de la correspondance Curry-Howard. La **géométrie non-commutative** de Connes, la **physique mathématique** des catégories de Fukaya, les **langages de programmation** fondés sur les types dépendants (Coq, Lean, Agda) : tous ces domaines sont fils directs de la révolution grothendieckienne.

Mais au-delà de ces prolongements techniques, c'est la **posture épistémologique** qui constitue l'héritage le plus profond : la conviction que la bonne question n'est pas «& qu'est-ce que cet objet& ?& » mais «& dans quel *cadre* cet objet devient-il naturel& ?& ». La mer montante, toujours.

► Glossaire des concepts clés

Catégorie : collection d'objets et de morphismes entre eux, avec composition associative et identités.

Foncteur : application entre catégories préservant morphismes et composition.

Transformation naturelle : transformation entre foncteurs, « naturelle » car indépendante de tout choix.

Adjonction : relation $\text{Hom}(F(A), B) \cong \text{Hom}(A, G(B))$ entre deux foncteurs F et G en sens opposés.

Faisceau : donnée locale cohérente sur un espace, se recollant globalement.

Topos : catégorie se comportant comme la catégorie des ensembles — possède limites finies, exponentielles, classificateur Ω .

Logique intuitionniste : logique où vérité = construction effective ; rejette le tiers exclu et la double négation.

Correspondance Curry-Howard : isomorphisme entre preuves (logique) et programmes (lambda-calcul) ; propositions = types.

Théorème de Yoneda : un objet A est entièrement déterminé par le foncteur $\text{Hom}(-, A)$.

Références principales

Alexander Grothendieck, Récoltes et Semailles, Gallimard, 2022

Saunders Mac Lane & Ieke Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory, Springer, 1992

Pierre Cartier, «& Grothendieck et les motifs& », Prépublication IHES, 2000

Colin McLarty, «& The Rising Sea: Grothendieck on Simplicity and Generality& », 2007

William Lawvere & Stephen Schanuel, Conceptual Mathematics, Cambridge University Press, 2009

Per Martin-Löf, «& Intuitionistic Type Theory& », Bibliopolis, 1984